

MATEMÁTICA DISCRETA I**PRIMER PARCIAL (Recuperación) (Soluciones)****Observaciones:**

- Tiempo: 1h. 30 m.
- Sólo se valorarán las respuestas que estén justificadas correctamente.
- No está permitido el uso de dispositivos electrónicos.

Ejercicio 1

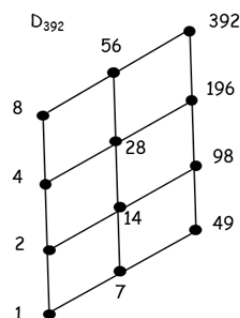
Sea D_{392} el conjunto de todos los divisores positivos de 392, y sea $|$ la relación de orden de divisibilidad, es decir, $a|b$ significa que "a divide a b".

- a) **(5 puntos)** Dibuja el diagrama de Hasse del conjunto ordenado $(D_{392}, |)$.
- b) **(5 puntos)** Obtén las cotas superiores e inferiores, supremo e ínfimo, máximo y mínimo, maximales y minimales, si los hay, del subconjunto $B = \{2, 7, 49, 196\}$.
- c) **(5 puntos)** Razona si 7 y 49 tienen complementario en D_{392} . En caso afirmativo obténlos.

Razona si $(D_{392}, |)$ es un Álgebra de Boole.

Solución

a)



- | | |
|--|------------------------------|
| b) cotas superiores $B = \{196, 392\}$ | cotas inferiores $B = \{1\}$ |
| supremo $B = 196$ | ínfimo $B = 1$ |
| maximales $B = \{196\}$ | minimales $B = \{2, 7\}$ |
| máximo $B = 196$ | mínimo B no existe |

- c) x es complementario de 7 en D_{392} si y sólo si $\inf\{7, x\} = 1$ y $\sup\{7, x\} = 392$.

No existe el complementario de 7 en D_{392} .

y es complementario de 49 en D_{392} si y sólo si $\inf\{49, y\} = 1$ y $\sup\{49, y\} = 392$.

Entonces 8 es el complementario de 49 en D_{392} .

D_{392} no es Álgebra de Boole porque $\text{card } D_{392} = 12$ que no es potencia de 2.

Ejercicio 2

- a) **(5 puntos)** Determina la tabla de verdad de la expresión booleana $E(x, y, z) = x' + xz + (y'x)'$.

MATEMÁTICA DISCRETA I**PRIMER PARCIAL (Recuperación) (Soluciones)**

b) **(5 puntos)** Dada la función booleana $f : B^4 \rightarrow B$ cuyo conjunto de verdad es

$$S(f) = \{(0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 1)\}$$

- Calcula una expresión booleana para f en forma de suma de productos elementales.
- Simplifica la expresión booleana obtenida por el método de Quine - McCluskey.

Solución

a) $x' + xz + (xy')' = x' + xz + (x' + y) = x' + y + xz$

x	y	z	$x' + y + xz$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

b)

i) $E(x, y, z, t) = xyz t + x' y z t + x y' z t + x' y' z t + x' y z t' + x' y z' t + x' y' z' t + x' y' z t'$

ii) Aplicando el algoritmo de Quine - McCluskey:

· 1111	· -111	--11
· 1011	· 1-11	0-1-
· 0111	· 0-11	0--1
· 0011	· 011-	
· 0110	· 01-1	
· 0101	· -011	
· 0001	· 00-1	

MATEMÁTICA DISCRETA I**PRIMER PARCIAL (Recuperación) (Soluciones)**

- 0010
- 001-
- 0-10
- 0-01

	1111	0111	1011	0011	0110	0101	0001	0010
--11	√	√	√	√				
0-1-		√		√	√			√
0--1		√		√		√	√	

La expresión booleana pedida es: $E'(x, y, z, t) = x't + zt + x'z$.

Ejercicio 3

- a) (5 puntos) Demuestra por inducción que

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

- b) (10 puntos) Un importador de vehículos trabaja tres modelos diferentes. El modelo superior se vende por 103.000 €, el modelo intermedio se vende a 78.000 € y el modelo básico se vende por 67.000 €. Si el pasado año vendieron 32 vehículos por los que facturaron un total de 2.188.000 €, ¿cuántos vehículos de cada tipo vendieron?

Solución

- a) La fórmula es cierta si $n = 1$, puesto que

$$\sum_{k=1}^1 k = \frac{1(1+1)}{2}$$

Hipótesis de inducción: supongamos que la fórmula es cierta para $k = n-1$, entonces

$$\sum_{k=1}^n k = \sum_{k=1}^{n-1} k + n = \frac{(n-1)n}{2} + n = \frac{(n-1)n + 2n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

se cumple la igualdad para todo $n \geq 1$.

- b) Sean x, y, z el número de vehículos vendidos de cada uno de los modelos, entonces se tiene que

$$\begin{cases} 103x + 78y + 67z = 2188 \\ x + y + z = 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 36x + 11y = 44 \\ z = 32 - x - y \end{cases}$$

MATEMÁTICA DISCRETA I**PRIMER PARCIAL (Recuperación) (Soluciones)**

$$\begin{cases} 36 = 11.3 + 3 \\ 11 = 3.3 + 2 \\ 3 = 2.1 + 1 \end{cases} \Rightarrow 1 = 3 - 2 = 3 - (11 - 3.3) = -11 + 4.3 = -11 + 4(36 - 11.3) = 4.36 - 11.13$$

$$44 = 176.36 - 572.11 \Rightarrow \begin{cases} x = 176 + 11t \geq 0 \\ y = -572 - 36t \geq 0 \\ z = 428 + 25t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow t = -16 \Rightarrow x = 0, y = 4, z = 28$$